数理解析研究所講究録 1345 巻 2003 年 50-64

A note on surfaces of general type with $p_g = q = 1$

東北大学大学院理学研究科 石田 弘隆 (Ishida Hirotaka)
Mathematical Institute,
Tohoku University

1 導入

S を $\mathbb{C}$ 上の極小一般型曲面とする. 曲面 S に対して種数 p_g を $p_g := \dim_{\mathbb{C}} H^2(S, \mathcal{O}_S)$, 不正則数 q を $q := \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S)$ と定義する. また, K_S を S の標準因子とする. 以下, S は $p_g = q = 1$ なる極小一般型曲面とする. このとき, S の標準因子の自己交点数 K_S^2 は $2 \le K_S^2 \le 9$ を満たす. $a\colon S \longrightarrow \mathrm{Alb}(S)$ を S のアルバネーゼ写像とする. $q = 1$ であるので, $\mathrm{Alb}(S) =: E$ は $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線である. 従って, S は a により, E 上の曲線束となる. g を a の一般ファイバーの種数とする. a が平坦射であることから, a_*K_S は E 上のベクトル束となる. $\omega\colon S \to \mathbb{P}_E(a_*K_S)$ を相対標準写像とし, $\pi\colon \mathbb{P}_E(a_*K_S) \to E$ を自然な射影とすると, $a = \pi \circ \omega$ が成り立つ. a の $t \in E$ でのファイバーを S_t と書く. a_*K_S の階数は $h^0(K_S|_{S_t}) = g$ である. さらに, Leray のスペクトル列により, a_*K_S の次数は 1 であることがわかる. このとき, Catanese と Ciliberto は [4] において, a_*K_S の直既約ベクトル束による分解が

$$a_*K_S = \bigoplus_{j=1,2,\dots,k} W_j.$$

(ただし, $\deg W_1 = 1,\ \deg W_j = 0,\ \operatorname{rank} W_j = 1\ (j = 2, 3, \dots, k)$) となることを示している. この分解により, 以下の可換図式を得る.

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{P}_E(a_*K_S) \\ {\scriptstyle \omega'} \downarrow & \swarrow_{\varphi} & \downarrow {\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{P}_E(W_1) & \xrightarrow{p} & E \end{array}$$

H を $p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E(W_1)}(H) \cong W_1$ なる因子とし, F は p のあるファイバーの線形同値類とする. W_1 は次数 1 の直既約ベクトル束であるから, Atiyah [1] により射影空間束 $\mathbb{P}_E(W_1)$ は同型を除いて一意に定まる. 射影空間束 $\mathbb{P}_E(W_1)$ は楕円曲線 E の g 次対称積 $E^{(g)}$ と同型である (cf. [1] p. 451). ここで, g 次元対称積 $E^{(g)}$ とは, E^g に対称群 S_g の作用 $\tau\colon S_g \times E^g \longrightarrow E^g$ を,

$$\tau(\sigma, P_1, P_2, \cdots, P_g) = (P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, \dots, P_{\sigma(g)})$$

と定義したとき, E^g の S_g による 商多様体 E^g/S_g により与えられる. このとき, $p\colon E^{(g)} \longrightarrow E$ を $p(P_1, P_2, \dots, P_g) = P_1 + P_2 + \dots + P_g$ と定義すると, p により $E^{(g)}$ は射影空間束で

あることがわかる. 従って, 種数1, 不正則数1の極小一般型曲面 S から $E^{(g)}$ へ写像が必ず存在し, この写像を para-canonical map という.

S の標準因子の自己交点数を2または3のときは, S の para-canonical map を詳細に調べることにより, 構造定理が示されている. $K_S^2=2$ のときは, Catanese [3], Catanese-Ciliberto [4] において研究され, 次のような結果が得られている. ここで, 曲線上の m 重点 P が1回の点中心の blow up により重複度が $m-1$ 以下の点に分解するとき, 単純 m 重点と呼ぶことにする.

定理 1 (Catanese [3]), Catanese-Ciliberto [5, Theorem 3.1]) S,α,E,g,ω,π を上のようにとる. $K_S^2=2$ のとき, $g=2$ でかつ以下が成り立つ.

(1) a_*K_S は階数2, 次数1の直既約なベクトル束である.

(2) ω は $2:1$ 正則写像である.

(3) ω の分岐因子 B は $6H-2F$ に線形同値で, B は特異点としては2重点または単純3重点のみを持つ.

$K_S^2=3$ のときは, Catanese-Ciliberto [4], [5] において研究され, $K_S^2=2$ のときのように構造定理が示されている.

定理 2 (Catanese-Ciliberto [5, Theorem 3.1]) S,a,E,g,ω,π を上のようにとる. このとき, $g=2$ または3となる.

(i) $g=2$ のとき,

(i-1) a_*K_S は階数2, 次数1の直既約なベクトル束である.

(i-2) ω は $2:1$ 写像でかつ, $P\in S$ 中心の blow up を合成すると正則写像となる

(i-3) ω の分岐因子 B は $6H$ に線形同値で, B は P を通るファイバーを含み, このファイバー上に, 単純4重点を2点持つ. これら2点以外の特異点としては2重点または単純3重点のみを持つ.

(ii) $g=3$ のとき,

(ii-1) a_*K_S は階数3, 次数1の直既約なベクトル束である.

(ii-2) ω は正則写像である.

(ii-3) $\omega(S)$ は標準モデルと同型である.

(ii-4) $\omega(S)$ は $4H-F$ に線形同値である.

以上の定理により, $K_S=2,3$ のときは $a_*K_S=W_1$ となり, para-canonical map と相対標準写像は一致する. もし $g=2$ なら, 2次対称積 $E^{(2)}$ の2次被覆で与えられる. 逆に, 定理1 (3) (resp. 定理2 (i-3)) の条件を満たす2次対称積 $E^{(2)}$ 上の因子 B をとり, B を分岐因子とする曲面の極小モデルをとることにより $p_g=q=1, K_S^2=2$ (resp. $K_S^2=3$) なる極小一般型曲面を与えることができる. $g=3$ のときも, 3次対称積 $E^{(3)}$ 上の $4H-F$ と線形同値で, 有理2重点のみを持つ相対4次曲線束の極小モデルが $p_g=q=1, K_S^2=3$ なる極小一般型曲面を与える.

楕円曲線 E の自己同型 T_σ を $T_\sigma(P) := P - \sigma$ と定義し, E の σ による平行移動という. h を E の自己同型とする. このとき, $E^{(g)}$ の自己同型 $h^{(g)}$ を自然に $h^{(g)}(P_1, P_2, \ldots, P_g) = (h(P_1), h(P_2), \ldots, h(P_g))$ により定義する. 従って, E の平行移動のなす群は $E^{(g)}$ の代数的同値類に作用する.

命題 3 (Catanese-Ciliberto [5, Proposition 1.5]) E の平行移動のなす群の $E^{(g)}$ の代数的同値類への作用は $gD - F$ の整数倍の類を除いて推移的である. つまり, $gD - F$ の整数倍以外の代数的同値類 $mD + nF$ の任意の 2 元 D_1, D_2 に対して, ある $\sigma \in E$ が存在して $T_\sigma^{(g)*}(D_1)$ と D_2 は線形同値である.

Atiyah [1] により, 楕円曲線上の次数 1 の直既約ベクトル束は次数 0 の直線束のテンソル積の差を除いて, 一意に定まる. この理由で, 楕円曲線上の次数 1 の直既約ベクトル束で定義される射影空間束は同型を除いて一意に定まる. 従って, 以下では楕円曲線上の階数 g, 次数 1 の直既約ベクトル束 V_g を 1 つ固定する. さらに, 0_E を楕円曲線 E の零元とし, $\det V_g = \mathcal{O}_E(0_E)$ を満たすものとする.

また, 命題 3 により, $p_g = q = 1, K_S^2 = 2$ のときは相対標準射の分岐因子 B は $6H - 2p^{-1}(0_E)$ に線形同値であるとしてよい. $p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ のときは相対標準射の像は $4H - p^{-1}(0_E)$ に線形同値であるとしてよい.

$p_g = q = 1, K_S^2 = 2$ または 3 なる極小一般型曲面の代わりに考察するべき対象 (2 次被覆の分岐因子や双有理射の像) は射影空間束内のある因子であるので, 1 本の定義方程式を与えることにより曲面を逆に構成することができる. また, $K_S^2 \geq 4, g = 2$ のときも, 4.1 節にあるように射影平面束の 2 次被覆となり, 分岐因子の満たすべき条件がわかる. このような射影空間束内で定義方程式を 1 本だけ与えることにより構成できる曲面の存在性や曲線束としての構造について研究し, 以下の結果を得た.

(1) 任意の楕円曲線 E に対して, $E \cong \mathrm{Alb}(S)$ を満たし, 標準モデルが非特異で, a の特異ファイバーをただ 1 つ持つ $p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ なる極小一般型曲面は存在し, その同型類は 4 つである.

(2) $p_g = q = 1, K_S^2 = 4, 5, g = 2$ なる極小一般型曲面は存在する.

どちらも具体的に射影空間束上に定義方程式を与えることにより示す. 一般に, 代数曲線束は特異ファイバーとして Lefschetz ファイバーのみを持ち, 特別な場合として, より複雑な特異ファイバーを持つ曲線束が存在すると思われる. 最も特別な場合として, 特異ファイバーを 1 本だけ持つ曲線束が考えられる. しかし, モノドロミーの議論により, $\mathbb{P}^1$ 上の曲線束は特異ファイバーを持てば, もう 1 本特異ファイバーを持たなければならない. 従って, (1) により特異ファイバーをただ 1 つ持つ曲線束は底空間を楕円曲線としてはじめて起こり得る現象であることがわかる. (2) に関しては, Xiao [10] Theorem 2.2 により, $p_g = q = 1, g = 2$ のとき $2 \leq K_S^2 \leq 6$ であることが示されている. さらに, Xiao [10] Theorem 2.9 (i) において $K_S^2 = 4$ の例が与えられている. しかし, $K_S^2 = 5$ の例は与えられてはいない. また $K_S^2 = 4$ でも, Xiao [10] Theorem 2.9 (i) では直線束の直和に分解する

ベクトル束で定義された射影直線束の2次被覆で与えらているので, 直既約ベクトル束で定義された射影直線束の2次被覆を構成することにより例を与える.

2 射影空間束内での定義方程式

この節では, 射影空間束 $\mathbb{P}_E(V_g)$ 内での定義方程式を求める. ここで, 定義方程式を直接求めるのではなく, Takahashi [9] の方法を用いる. その理由として, V_g は相対標準束の次数1の部分直既約ベクトル束であったので, 斉次座標を大域的にとることができない. 従って, 定義方程式を与えるには貼り合わせを考えなければならず, 式は複雑になる. しかし, 射影空間束を定義するベクトル束が直線束の直和に分解すれば, 斉次座標を大域的にとることができ, 因子類の定義方程式はより易しくなる. Takahashi の方法は Oda [8] と Atiyah [1] による楕円曲線の適当な有限射による直既約ベクトル束の逆像が直線束の直和に分解することを用いて, 定義方程式を直接求めるかわりに, 逆像のベクトル束で定義される射影空間束内で求める方法である. この節ではこの方法を紹介し, これを用いて $p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ なる極小一般型曲面の標準モデルの定義方程式を具体的に書き下す. 以下, V_3 を単に V と書く.

2.1 楕円曲線の isogeny

最初に次の定理を紹介しておく.

定理 4 (cf. [1], [8], [9, Theorem 2.4]) E を楕円曲線, $\mathcal{E}_E(r,d)$ $(r,d \in \mathbb{Z})$ を階数 r, 次数 d の直既約ベクトル束の同型類の集合とする. $\varphi : \widetilde{E} \longrightarrow E$ を次数 r の isogeny とおく. $(r,d) = 1$ ならば,

$$\{L \in \mathrm{Pic}(\widetilde{E}) |\deg L = d\} \longrightarrow \mathcal{E}_E(r,d) : L \longmapsto \varphi_* L$$

は全単射写像である. $G := \ker\varphi$ とすると,

$$\varphi^*\varphi_* L \cong \bigoplus_{\sigma\in G} T_\sigma^* L,$$

となる.

以下では, 特に $p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ なる極小一般型曲面の標準モデルの定義方程式を求める議論を進める.

$\varphi : \widetilde{E} \longrightarrow E$ を次数3の isogeny を任意にとる. この定理により, $\varphi_* L \cong V$ なる $\widetilde{E}$ 上の直線束 $L = \mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\widetilde{P})$ が存在する. ただし, $\widetilde{P} \in \widetilde{E}$ の位数は3である. $G = \ker\varphi = \{0_{\widetilde{E}}, \sigma, (2\sigma)\}$ $(\sigma \neq 0_{\widetilde{E}}, (3\sigma) = 0_{\widetilde{E}})$ と書けるので (因子のスカラー倍と区別するため, 楕円曲線上の元 σ の n 個の楕円曲線での和を $(n\sigma)$ と書くことにする),

$$\varphi^* V \cong L \oplus T_\sigma^* L \oplus T_{2\sigma}^* L$$

となることもわかる. $\widetilde{V}=\varphi^*V$ と書く. このとき, 以下の可換図式が成り立つ.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}_E(V) \\
\widetilde{p}_{\widetilde{V}} \downarrow & & \downarrow p \\
\widetilde{E} & \xrightarrow{\varphi} & E
\end{array}
$$

$\widetilde{H}_{\widetilde{V}}$ は $\widetilde{p}_{\widetilde{V}*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V})}(\widetilde{H}_{\widetilde{V}})\cong\widetilde{V}$ なる因子とする. このとき,

$$
\Phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_E(V)}(4H-p^{-1}(0_E))\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V})}(4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma)))
$$

となり, Φ による曲面 $S'\in|4H-p^{-1}(0_E)|$ の逆像は $|4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma))|$ に属する. しかし, $|4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma))|$ の類すべてが Φ^*S' なる形をしてはいない. $G=\{0_{\widetilde{E}},\sigma,(2\sigma)\}$ は $|4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma))|$ に $\{\mathrm{id},T_\sigma^*,T_{2\sigma}^*\}$ として作用している. このとき, Takahashi [9] は次の補題を示した.

補題 5 ([9, Lemma 3.23]) 記号を上のようにとる. このとき,

$$
\Phi^*|4H-p^{-1}(0_E)|=|4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma))|^G.
$$

この補題により, $p_g=q=1, K_S^2=3, g=3$ なる極小一般型曲面の同型類と $\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V})$ の線形系 $|4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma))|^G$ に属する高々有理2重点しか持たない曲面の同型類は1対1に対応する.

$T_{-\widetilde{P}}^*\widetilde{V}\cong\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\infty)\oplus\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\sigma)\oplus\mathcal{O}_{\widetilde{E}}((2\sigma))$ より, $\widetilde{W}=\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\infty)\oplus\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\sigma)\oplus\mathcal{O}_{\widetilde{E}}((2\sigma))$ とおいて以下の可換図式を考える.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}_{\widetilde{E}}:=\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{W}) & \xrightarrow{T_{-\widetilde{P}}} & \mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V}) \\
\widetilde{p}\downarrow & & \downarrow\widetilde{p}_{\widetilde{V}} \\
\widetilde{E} & \xrightarrow{T_{-\widetilde{P}}} & \widetilde{E}
\end{array}
$$

$\widetilde{H}$ を $\widetilde{H}_{\widetilde{V}}$ と同様に定義する. このとき, $\widetilde{P}\in\widetilde{E}$ の位数は3なので, $T_{-\widetilde{P}}$ から,

$$
\begin{aligned}
&H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V}),\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V})}(4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma)))\\
&\quad\cong H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(4\widetilde{H}-\widetilde{p}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}^{-1}((2\sigma))),
\end{aligned}
$$

が導かれ, この同型は G の作用と可換であるので,

$$
\begin{aligned}
&H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V}),\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\widetilde{V})}(4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^{-1}((2\sigma)))^G\\
&\quad\cong H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(4\widetilde{H}-\widetilde{p}^{-1}(0_{\widetilde{E}})-\widetilde{p}^{-1}(\sigma)-\widetilde{p}^{-1}((2\sigma)))^G,
\end{aligned}
$$

も導かれる. 従って, 任意の S の標準モデル S' に対して, 適当な isogeny φ から自然に拡張される Φ による逆像 Φ^*S' は線形系 $|4\widetilde{H}_{\widetilde{V}}-\widetilde{p}_{\widetilde{V}}^*((0_{\widetilde{E}})+(\sigma)+(2\sigma))|^G$ に属する. よって,

$p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ なる極小一般型曲面の同型類と $\mathbb{P}_{\widetilde{E}}$ の線形系 $|4\widetilde{H} - \widetilde{p}^{-1}(0_{\widetilde{E}}) - \widetilde{p}^{-1}(\sigma) - \widetilde{p}^{-1}((2\sigma))|^G$ に属する高々有理2重点しか持たない曲面の同型類は1対1に対応する．S'' を $|4\widetilde{H} - \widetilde{F}_\infty - \widetilde{F}_\sigma - \widetilde{F}_{(2\sigma)}|^G$ に属する曲面とする．$G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は S'' に固定点のない自己同型として作用する．従って，S''/G は $|4H - p^{-1}(0_E)|$ に属する．S''_P を S'' の $P \in \widetilde{E}$ でのファイバーとし，$(S''/G)_{P'}$ を S''/G の $P' \in E$ でのファイバーとする．もし，$\varphi(\{P_0, P_1, P_2\}) = P, (P_0, P_1, P_2 \in \widetilde{E})$ であるとすると，各 S''_{P_i} は $(S''/G)_P$ と同型である．また $\Phi(\{Q_0, Q_1, Q_2\}) = Q, (Q_0, Q_1, Q_2 \in S'')$ とすると，各 $\mathcal{O}_{S'', Q_i}$ は $\mathcal{O}_{S''/G, Q}$ に同型である．$|4H - p^{-1}(0_E)|$ に属する高々有理2重点しか持たない曲面の代わりに，$|4\widetilde{H} - \widetilde{p}^{-1}(0_{\widetilde{E}}) - \widetilde{p}^{-1}(\sigma) - \widetilde{p}^{-1}((2\sigma))|^G$ に属する高々有理2重点しか持たない曲面を考察する．定義方程式も直接与えるのではなく，$\mathbb{P}_{\widetilde{E}}$ 上で $|4\widetilde{H} - \widetilde{p}^{-1}(0_{\widetilde{E}}) - \widetilde{p}^{-1}(\sigma) - \widetilde{p}^{-1}((2\sigma))|^G$ に属する曲面の定義方程式を与えることにする．

2.2 $\mathbb{P}_{\widetilde{E}}$ での定義方程式

$\widetilde{F}_Q := \widetilde{p}^{-1}(Q)$ とおく．実際に，$H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(4\widetilde{H} - \widetilde{F}_{0_{\widetilde{E}}} - \widetilde{F}_\sigma - \widetilde{F}_{(2\sigma)}))^G$ の元を求める．以下，$\widetilde{E}$ を $\mathbb{P}^2$ において定義式 $Y^2Z = X(X-Z)(X-\lambda Z)$ $(\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\})$ で与えられるものとする．ここで，$(X : Y : Z)$ を $\mathbb{P}^2$ の斉次座標系とする．また，楕円曲線の群演算を $\infty := (0:1:0)$ を零元とするようにとる．このとき，$\sigma := (\alpha : \beta : 1)$ とおくと，$(2\sigma) = (\alpha : -\beta : 1)$ となる．σ は位数3の点であるので，$\beta \neq 0$ であり，さらに，α, β は $m = 3\alpha^2 - 2(\lambda+1)\alpha + \lambda$ とおくと，

$$\begin{aligned} &\beta^2 = \alpha^3 - (\lambda+1)\alpha^2 + \lambda\alpha, \\ &3\alpha^4 - 4(\lambda+1)\alpha^3 + 6\alpha^2\lambda - \lambda^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

を満たす．Leray のスペクトル列により，

$$H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(\widetilde{H} - \widetilde{F}_\infty)) \cong H^0(\widetilde{E}, \mathcal{O}_{\widetilde{E}} \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}((\sigma) - \infty) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}((2\sigma) - \infty)) \cong \mathbb{C}.$$

となるので，0でない $Z_0 \in H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(\widetilde{H} - \widetilde{F}_\infty))$ なる元をとることができる．$Z_1 := T_\sigma^* Z_0 \in H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(\widetilde{H} - \widetilde{F}_\sigma))$, $Z_2 := T_{2\sigma}^* Z_0 \in H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(\widetilde{H} - \widetilde{F}_{2\sigma}))$ とおく．また，

$$f := \frac{X - \alpha Z}{Z}, \; g := \frac{4\beta^2(X - \alpha Z)}{2\beta(Y - \beta Z) - m(X - \alpha Z)}, \; h := \frac{4\beta^2(X - \alpha Z)}{-2\beta(Y + \beta Z) - m(X - \alpha Z)}$$

とおく．このとき，$H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(4\widetilde{H} - \widetilde{F}_\infty - \widetilde{F}_\sigma - \widetilde{F}_{2\sigma}))$ の基底は以下のように求められる．

補題 6 $H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(4\widetilde{H} - \widetilde{F}_\infty - \widetilde{F}_\sigma - \widetilde{F}_{(2\sigma)}))^G$ の基底として，

$$\begin{aligned} \Psi_1 &:= f{Z_0}^4 + g{Z_1}^4 + h{Z_2}^4, \\ \Psi_2 &:= Z_0 Z_1 Z_2 (Z_0 + Z_1 + Z_2), \\ \Psi_3 &:= g Z_0 {Z_1}^3 + h Z_1 {Z_2}^3 + f {Z_0}^3 Z_2, \\ \Psi_4 &:= h Z_0 {Z_2}^3 + f {Z_0}^3 Z_1 + g {Z_1}^3 Z_2, \\ \Psi_5 &:= gh{Z_1}^2{Z_2}^2 + fh{Z_0}^2{Z_2}^2 + fg{Z_0}^2{Z_1}^2 \end{aligned}$$

をとることができる.

3 ただ1つの特異ファイバーを持つ曲面

S を標準モデルが非特異で, a の特異ファイバーをただ1つ持つ $p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ なる極小一般型曲面とする. $S \cong \omega(S)$ は a により楕円曲線 E 上の曲線束の構造が入るので, S_P を P でのファイバーとすると,

$$\chi_{\text{top}}(S) = (2-2g)\chi_{\text{top}}(E) + \sum_{P \in E}(\chi_{\text{top}}(S_P) + 2g - 2), \tag{2}$$

が成り立つ. Noether の公式から, $\chi_{\text{top}}(S) = 9$ である. $\chi_{\text{top}}(E) = 0, g = 3$ であることから, ただ1つの特異ファイバーのオイラー数は5でなくてはならない. 4次曲線のオイラー数の最大値は5で, オイラー数が5となるのは4本の直線が1点で交わる4次曲線のみである. 従って, 特異ファイバーがただ1つとなるものが存在する可能性があり, その特異ファイバーは4本の直線が1点で交わる曲線とならなくてはならない. 4本の直線の交点では3回の偏導関数がすべて0となることから, この条件を満たす定義方程式をすべて書き下すと, 次の命題を得る.

命題 7 任意の楕円曲線 E に対して, $E \cong \mathrm{Alb}(S)$ を満たし, 標準モデルが非特異で, a の特異ファイバーをただ1つ持つ $p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ なる極小一般型曲面は次の4つのいずれかの定義式で与えられる曲面と同型である. ただし, ζ を -2β の3乗根とする.

$$\begin{aligned}
\Psi_1 =& fZ_0{}^4 + gZ_1{}^4 + hZ_2{}^4, \\
\Psi_\zeta :=& fZ_0{}^4 + gZ_1{}^4 + hZ_2{}^4 - 12\zeta^2 Z_0Z_1Z_2(Z_0+Z_1+Z_2) \\
&+ 4(gZ_0Z_1{}^3 + hZ_1Z_2{}^3 + fZ_0{}^3Z_2) + 4(hZ_0Z_2{}^3 + fZ_0{}^3Z_1 + gZ_1{}^3Z_2) \\
&- 6\zeta^{-2}(ghZ_1{}^2Z_2{}^2 + fhZ_0{}^2Z_2{}^2 + fgZ_0{}^2Z_1{}^2), \quad (i = 1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}$$

4つの式を得たものの, これらが定義する曲面が非特異となるかどうかを調べる必要がある. まず, Ψ_1 について調べる.

∞ のファイバーの定義式は $\Psi_1(\infty) = 2\beta(Z_1{}^4 - Z_2{}^4)$ となる. $\Psi_1(\infty)$ で定義される曲線は直線4本が1点で交わる曲線となる. $\infty, \sigma, 2\sigma$ 以外のファイバーでは,

$$\partial_{Z_0}\Psi_1 = 4fZ_0{}^3,\ \partial_{Z_1}\Psi_1 = 4gZ_1{}^3,\ \partial_{Z_2}\Psi_1 = 4hZ_2{}^3$$

により, 特異ファイバーはない. また, 曲面特異点があれば, ∞ でのファイバー上の特異点で持たなければならない. しかし, $(\infty,\ (1:0:0))$ において局所的に定義式を見ると,

$$\Psi_1 = 2\beta(z_1{}^4 - z_2{}^4) + t + (\text{higher term}),$$

(ただし, $z_1 := Z_1/Z_0,\ z_2 := Z_2/Z_0,\ t : \infty$ での局所パラメータ) と書けるので, 曲面として非特異である. 従って, Ψ_1 で定義される曲面 S_1'' の G による商多様体をとると, 標準モデルが非特異で, a の特異ファイバーをただ1つ持つ $p_g = q = 1, K_S^2 = 3, g = 3$ なる極小一般型曲面となる.

S_ζ'' を $\Psi_\zeta = 0$ で定義される曲面とする. S_1'' は非特異であったが, S_ζ'' も非特異である. しかし, S_1'' のときのように直接計算で示すのは難しいので, S_ζ'' の性質を用いて示す. ここでいくつかの事実を紹介する.

補題 8 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\infty) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\sigma) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}((2\sigma)))$ において, $\Psi := \sum_{1 \le i \le 5} a_i \Psi_i$ で定義される曲面 S'' は被約である. また, S'' が既約ではない必要十分条件は, $a_1 = a_3 = a_4, a_5 = 0$ である.

補題 9 S_ζ'' を $\Psi_\zeta = 0$ で定義される曲面とし, $P \in \widetilde{E}$ を位数2の点とする. このとき, S_ζ'' の P でのファイバー は非特異である.

これら2つは定義方程式を用いて計算することにより得られる. これらの補題により, S_ζ'' は正規であることが示される. S_ζ'' は $\mathbb{P}_{\widetilde{E}}$ 上1つの式で定義されるので, S_ζ'' が正規であることを示すには S_ζ'' の特異点の集合に1次元の既約成分が存在しないことを示せばよい. もし, S_ζ'' の特異点の集合に1次元の既約成分が存在したとすると, 非特異ファイバーの存在 (補題 9) から, $\widetilde{p}$ による像は点となる. つまり, 重複度が2以上の既約成分を持つファイバーを含む. しかし, 計算により S_ζ'' には重複度が2以上の既約成分を持つファイバーは存在しないことがわかる. さらに, Ψ_1, Ψ_ζ はともに, Ψ_3 と Ψ_4 の係数の値は一致しているが, Ψ_3 と Ψ_4 の係数の値が一致した式で定義される曲面は以下のように特徴づけられる.

補題 10 $\Psi = \sum_{1 \ge i \ge 5} a_i \Psi_i \in H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(4\widetilde{H} - \widetilde{F}_\infty - \widetilde{F}_\sigma - \widetilde{F}_{(2\sigma)}))^G$ の定義する高々有理2重点しか持たない曲面を S'' とする. S'' は自明でない位数2の自己同型射 Φ を持つとすると, このとき, Φ は $\iota\colon E \longrightarrow E : P \mapsto -P$ から自然に定義できる射影変換 $\bar{\Phi}\colon \mathbb{P}_{\widetilde{E}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\widetilde{E}}$ を S に制限することにより得られ, $a_3 = a_4$ を満たす.

自明でない位数2の自己同型射を持つ $\Psi = \sum_{1 \ge i \ge 5} a_i \Psi_i$ で定義される曲面 S'' に対して, $a_3 = a_4$ であるから, $\infty, \sigma, 2\sigma$ におけるファイバーは必ず既約でない特異ファイバーとなる (直線 $Z_1 + Z_2 = 0$ を必ず含む). ∞, σ, 2σ 以外の点 $P \in E$ において特異ファイバーを持つとする. $f(P) = f(-P)$, $g(P) = h(-P)$, $h(P) = g(-P)$ となる. P におけるファイバーの定義式 $\Psi(P)$ は, $\Psi(P)(Z_0, Z_1, Z_2) = \Psi(-P)(Z_0, Z_2, Z_1)$ であるから, $\Psi(P) = 0$ が $(q_0 : q_1 : q_2)$ で特異点を持つとすると, $\Psi(-P) = 0$ は $(q_0 : q_2 : q_1)$ で特異点を持つ. よって, $P = (p_0 : p_1 : 1) \in E$ において特異ファイバーを持つと, $P, P+\sigma, P+2\sigma, -P, -P+\sigma, -P+2\sigma$ においても特異ファイバーを持つ. ここで, $P, P+\sigma, P+2\sigma, -P, -P+\sigma, -P+2\sigma$ のうち2つが互いに等しいとすると, E の位数2の点を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とすると, $\{P, P+\sigma, P+2\sigma, -P, -P+\sigma, -P+2\sigma\} = \{\infty, \sigma, 2\sigma\}$ または $\{\gamma_i, \gamma_i+\sigma, \gamma_i+2\sigma\}$ $(i = 1, 2, 3)$ となる. 従って, $\infty, \sigma, 2\sigma, \gamma_i, \gamma_i+\sigma, \gamma_i+2\sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ 以外で特異ファイバーを1本持てば, 同型な特異ファイバーがあと5本ある. また, $\infty, \sigma, 2\sigma, \gamma_i, \gamma_i+\sigma, \gamma_i+2\sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ において

特異ファイバーを持っていたときでも, 特異ファイバーの特異点 $(q_0 : q_1 : q_2)$ が $q_1 \neq q_2$ であれば, 同一ファイバー上の点 $(q_0 : q_2 : q_1)$ においても $(q_0 : q_1 : q_2)$ と等しい特異点を持つ. さらに, S'' が特異点を持つときも同様にいくつかの場合を除いて, 他に5つ特異点を持つ. S''_ζ も自明でない位数2の自己同型射を持ち, 上で挙げた曲面の性質を持つ. この性質と正規であることから, S''_ζ は非特異であることが示すことができる.

補題 11 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\infty) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\sigma) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}((2\sigma)))$ において, Ψ_ζ で与えられる曲面 S''_ζ は非特異である.

(証明) S''_ζ は正規であるので, 特異点は孤立特異点である. S_ζ の特異点解消を $\nu : \widetilde{S''_\zeta} \longrightarrow S''_\zeta$ とする. このとき, $\chi(\mathcal{O}_{S''_\zeta}) - \chi(\mathcal{O}_{\widetilde{S''_\zeta}}) = \sum_{P \in S''_\zeta} p_g(S''_\zeta, P)$ が成り立つ. S''_ζ に曲面特異点が1点存在すれば, 他に2点存在する. S''_ζ が有理2重点以外の曲面特異点を持つとすると, 右辺は正で3の倍数である. $\widetilde{S''_\zeta}$ は楕円曲線上の種数3の曲線束であるから, $\kappa(S''_\zeta) \geq 1$ となる. $\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{S''_\zeta}}) \geq 0$ より, 左辺の最大値は3である. 従って, 左辺は0で, 有理2重点以外の曲面特異点は3点のみ存在する. Ψ_ζ は $a_3 = a_4$ を満たし, 自明でない位数2の自己同型射を持つ. 従って, $\infty, \sigma, 2\sigma, \gamma_i, \gamma_i + \sigma, \gamma_i + 2\sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ 以外の点のファイバー上に曲面特異点が1点存在すれば, 他に5点存在する. 有理2重点以外の曲面特異点は3点のみ存在するので, 特異点は $\infty, \sigma, 2\sigma$ または $\gamma_i, \gamma_i + \sigma, \gamma_i + 2\sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ のファイバー上に1つずつ存在する. つまり, 特異点は位数2以下の点のファイバー上に存在しなくてはならない. これは補題9に矛盾する. よって, S''_ζ は高々有理2重点しか持たない. しかし, $\infty, \sigma, 2\sigma$ でのファイバーの曲面のオイラー数への寄与はあわせて27となる. S''_ζ のオイラー数は27であるから, 他の特異ファイバーや有理2重特異点は存在しない. 以上より, S''_ζ は非特異であることがわかる. q.e.d.

また, 次の補題により, 4つは互いに同型ではないことがわかる.

補題 12 $\Psi = \sum_{1 \geq i \geq 5} a_i \Psi_i, \Psi' = \sum_{1 \geq i \geq 5} a'_i \Psi_i$ の定義する高々有理2重点しか持たない曲面が互いに同型であるとすると, $\Psi = c\Psi'$ または $\Psi = c\iota^*\Psi'$ $(c \in \mathbb{C} \backslash \{0\})$ が成り立つ.

以上により, 定理が示せた.

定理 13 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\infty) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\sigma) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}((2\sigma)))$ において, $\Psi_1 = 0, \Psi_\zeta = 0$ で与えられる曲面は互いに同型ではない. つまり, 楕円曲線 E を固定したとき, 種数1, 不正則数1, ${K_S}^2 = 3$, $g = 3$ で $E \cong \mathrm{Alb}(S)$ かつ標準モデルと同型でアルバネーゼ写像の特異ファイバーの数が唯1つである極小一般型曲面の同型類は4つである.

4　$K_S^2 = 4, 5, g = 2$ を満たす曲面の構成

4.1　$K_S^2 \geq 4, g = 2$ の構造

S が $g = 2, K_S^2 = 2, 3$ を満たすときは, 1 節のように Catanese と Ciliberto により, 構造定理が示されている. これらと同様に, $K_S^2 \geq 4$ のときの曲面 S の満たすべき条件を図式 $(*)$ を調べることにより得ることができる.

Riemann-Roch の定理より, 任意の $t \in E$ に対して $h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + S_t - S_{0_E})) = 1 + h^1(S, \mathcal{O}_S(K_S + S_t - S_{0_E}))$ が成り立つ. $p_g = 1$ と上半連続性から, Zariski 開集合 $E' \subset E$ で, 任意の $t \in E'$ に対して, $h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + S_t - S_{0_E})) = 1$ となるものが存在する. すなわち, $t \in E'$ のとき $K_S + S_t - S_{0_E}$ に線形同値な正因子 C_t が一意的に存在する. ここで, $\{(x, t) \in S \times E \mid x \in C_t\}$ の $S \times E$ での scheme-theoretic closure を Y とする. 射影 $S \times E \longrightarrow E$ により, 自然に定義される $Y \longrightarrow E$ のファイバーを改めて, C_t とおき, これにより曲線の平坦族 $\{C_t\}$ を得る. $\{C_t\}$ の固定部分を X とおき, 可動部分の族を $\{M_t\}$ とおく. $r := Y \cdot (x \times E)$ と定義すると, rank $W_1 = r$ となる. ([4] Theorem 2.3) 従って, 一般の $x \in S$ に対して, $\{M_t\}$ に属する x を通る曲線の個数が r ということである. このとき, 一般の $x \in S$ に対して, $\omega'(x) = t_1 + t_2 + \cdots + t_r$ となるならば, $M_{t_1}, M_{t_2}, \ldots, M_{t_r}$ は x を通る. また, para-canonical map ω' が定義されない点は, $\{M_t\}$ の base point のみである. このとき, $\{M_t\}$ に関して, 次の補題を適用することにより, $\{M_t\}$ の base point は $M^2 - 1$ 個ではない.

補題 14 ([4] Lemma 4.4)　S を $p_g = q = 1$ なる極小一般型曲面とする. S に含まれる曲線で構成されている楕円曲線上の平坦曲線族は固定部分を持たなければ, この曲線族に属する 2 つの曲線は一般に固定点を除いて 1 点のみで交わることはない.

$g = 2$ のとき, 相対標準写像は $2:1$ 写像となる. $a_* K_S$ が 直線束の直和に分解するとき, すなわち $r = 1$ のとき, para-canonical map はアルバネーゼ写像に等しく, 曲線族 $\{M_t\}$ はアルバネーゼ写像のファイバーの族に等しい (cf. [4] Remarks 4.3). $a_* K_S$ が直既約ベクトル束のとき, para-canonical map は相対標準写像に等しい.

Xiao [10] Theorem 2.2 を $p_g = q = 1$ なる極小一般型曲面に適用することにより, $2 \leq K_S^2 \leq 6$ であることが分かるので, $4 \leq K_S^2 \leq 6$ のとき, 特にこの節では $K_S^2 = 4$ のときを考察する.

補題 15　S を $p_g = q = 1, K_S^2 = 4, g = 2$ なる極小一般型曲面とすると, 相対標準写像は $2:1$ 写像で, その分岐因子と 2 次被覆は以下のいずれかの性質を満たす.

(i) $r = 1$ で ω の分岐因子 B は $6H + 2F$ に線形同値である. また, B を分岐因子とする $E^{(2)}$ の 2 次被覆 S' の特異点の幾何種数の和は 4 となり, S' の極小モデル S に等しい.

(ii) $r = 2$ かつ ω は $2:1$ 射で, S は $6H$ に線形同値な正因子 B を分岐因子とする $E^{(2)}$ の 2 次被覆 S' の極小モデルと同型である. さらに, S' の特異点の幾何種数の和は 2 となり, S' は (-1)-曲線を含まない.

(iii) $r=2$ かつ ω は $2:1$ 写像で2回の点中心の blow up を合成すると射となる. ω の分岐因子 B は $6H+2F$ に線形同値である. B を分岐因子とする $E^{(2)}$ の2次被覆 S' の幾何種数の和は4となる. また, S' は (-1)-曲線を2本含み, S' の極小モデルが S に等しい.

(証明) M を M_t の代数的同値類とする. $X \neq 0$ と仮定する. $K_S^2 = M^2+X\cdot M+K\cdot X = 4$ である. ここで, K_S はnefであるので, $K_S\cdot X \geq 0$ が成り立つ. $\{M_t\}$ は可動部分であったので, $M^2 \geq 0$ となる. また, [2] より, K_S は 数値的2-連結であるから, $X\cdot M \geq 0$ がわかる. 従って, 補題14より, $(M^2, X\cdot M, K\cdot X, K\cdot M) = (0,2,2,2), (0,3,1,3), (0,4,0,4), (2,2,0,4)$ のいずれかとなる. $K\cdot M + M^2$ は偶数なので, $(M^2, X\cdot M, K\cdot X, K\cdot M) = (0,3,1,3)$ は起こり得ない. $M^2=0$ ならば $r=1$ であるので, $\{M_t\}$ はアルバネーゼ写像のファイバーの族に等しい. アルバネーゼ写像のファイバーの種数は2, すなわち $K\cdot M + M^2 = 2$ であったので, $(M^2, X\cdot M, K\cdot X, K\cdot M) = (0,4,0,4)$ は起こり得ない.

(i) $(M^2, X\cdot M, K\cdot X, K\cdot M) = (0,2,2,2)$ のとき $M^2=0$ より, $\{M_t\}$ はアルバネーゼ写像のファイバーの族である. S の相対標準写像の分岐因子を B とする. B を $6H+nF, (n\in\mathbb{Z})$ に代数的同値とする. 相対標準写像による X の像は $H-F$ に代数的同値で, $X, H-F$ の数値的種数はそれぞれ2, 1であるから, $B\cdot(H-F)=n=2$ を得る.

(ii) $(M^2, X\cdot M, K\cdot X, K\cdot M) = (2,2,0,4)$ のとき $\{M_t\}$ に属する2つの一般の曲線の $\{M_t\}$ の base point での局所交点数の和を μ とする. 補題14により, $\mu = 0,2$ となる. $\mu=2, M^2=2$ とすると, $r=1$ となり矛盾するので, $\mu=0$ である. 同様に, 相対標準写像の分岐因子 B の代数的同値類は $6H$ となる. さらに, 命題3により, S は $6H$ に線形同値な正因子を分岐因子とする2次被覆の極小モデルに同型である.

(iii) $X=0$ のとき 仮定から, $\{M_t\}=\{C_t\}$ となる. C_t の数値的種数は5であるから, $r=2$ である. 相対標準写像 ω と ω' は等しく, $2:1$ 写像であることから, $\mu=2$ とならなくてはならない. 同様に, 相対標準写像の分岐因子 B の線形同値類を求めると, $B \sim 6H+2F$ を得る. q.e.d.

$K_S^2=2,3$ のときのように, 補題15の性質を満たす $E^{(2)}$ 上の分岐因子をとることにより, 逆に構成することができる. また, $K_S^2=5$ のときも補題15のような補題を同様に求めることができる.

4.2 曲面の構成

補題15の分岐因子の満たす条件の通りに曲面を構成する. ここで, 今回構成する曲面は以下の2つとする. ただし, F を $E^{(2)}$ のあるファイバーとする.

(1) $r=2$ かつ ω は $2:1$ 写像で2回の点中心の blow up を合成すると射となる. ω の分岐因子 B は $6H+2F$ に線形同値で, 2本の相異なるファイバー F_1, F_2 を含み, $B-F_1-F_2$ は F_1, F_2 上に通常3重点を2点づつ持つ.

(2) $r=2$ かつ ω は $2:1$ 写像で3回の点中心の blow up を合成すると射となる. ω の分

岐因子 B は $6H+4F$ に線形同値で, 3 本の相異なるファイバー F_1, F_2, F_3 を含み, $B-F_1-F_2-F_3$ は F_1, F_2, F_3 上に通常 3 重点を 2 点づつ持つ.

$K_S^2=3, g=3$ のときと同様に Takahashi の方法を用いることにより, (1),(2) の分岐因子の代わりにそれぞれ (1'),(2') にあるような因子を構成することができればよい. ただし, 楕円曲線 $\widetilde{E}$ は $\mathbb{P}^2$ において定義式 $Y^2Z=X(X-Z)(X-\lambda Z)$ $(\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\})$ で与えられるものとする. ここで, $(X:Y:Z)$ を $\mathbb{P}^2$ の斉次座標系とする. また, 楕円曲線の群演算を $\infty := (0:1:0)$ を零元とするようにとる. $\tau := (0:0:1) \in \widetilde{E}$ とおくと, τ は位数 2 の点となる. $\mathbb{P}_{\widetilde{E}} := \mathbb{P}_{\widetilde{E}}(\mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\infty) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\tau))$ とし, $\widetilde{p}\colon \mathbb{P}_{\widetilde{E}} \longrightarrow \widetilde{E}$ を射影とする. $\widetilde{H}$ を $\widetilde{p}_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(\widetilde{H}) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\infty) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{E}}(\tau)$ なる因子とし, $\widetilde{F}$ を $\mathbb{P}_{\widetilde{E}}$ のあるファイバーとする. また, $G := \{\infty, \tau\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする.

(1') $\widetilde{B} \in |6\widetilde{H}+4\widetilde{F}|^G$ で, 4 本の相異なるファイバー $\widetilde{F}_j$ $(j=1,2,3,4)$ を含み, $\widetilde{B}_0 := \widetilde{B}-\sum_{j=1,2,3,4}\widetilde{F}_j$ は $\widetilde{F}_j$ $(j=1,2,3,4)$ 上に通常 3 重点を 2 点づつ持つ.

(2') $\widetilde{B} \in |6\widetilde{H}+8\widetilde{F}|^G$ で, 6 本の相異なるファイバー $\widetilde{F}_j$ $(j=1,2,3,4,5,6)$ を含み, $\widetilde{B}_0 := \widetilde{B}-\sum_{j=1,2,3,4,5,6}\widetilde{F}_j$ は $\widetilde{F}_j$ $(j=1,2,3,4,5,6)$ 上に通常 3 重点を 2 点づつ持つ.

ここで, $\widetilde{B}$ ではなく, $\widetilde{B}_0$ の定義方程式を与える. $x=X/Z, y=Y/Z$ とおく. $\widetilde{F}_Q := \widetilde{p}^{-1}(Q), (Q \in \widetilde{E})$ とおく. また, $\mathbb{P}_{\widetilde{E}}$ の大域的な斉次座標を $Z_0 \in H^0(\mathbb{P}_{\widetilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(\widetilde{H}-\widetilde{F}_\infty))$ と $Z_1 = T_\tau^* Z_0$ する.

(1') を満たす $\widetilde{B}_0$ の定義方程式. 実際に構成するため, さらに, $\widetilde{B}_0$ は $6\widetilde{H}$ に線形同値で, $x^2=-\lambda$ を満たす $\widetilde{E}$ 上の 4 点のファイバー上で通常 3 重点を 2 点づつ持つとしておく. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(6\widetilde{H})$ の大域切断の基底は 2 節のように書き下すことができるので, $x^2=-\lambda$ を満たす $\widetilde{E}$ 上の 4 点のファイバー上で通常 3 重点を 2 点づつ持つ条件から, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\widetilde{E}}}(6\widetilde{H})$ の大域切断の基底の係数を定めることができる. このようにして, 得られる式の 1 つとして,

$$\Psi = (Z_0^2+Z_1^2)((x^2+\lambda+1)Z_0^4+2Z_0^2Z_1^2+(\lambda^2x^{-2}+\lambda+1)Z_1^4)$$

がとれる. $x^2=-\lambda$ を満たす $\widetilde{E}$ 上の点を Q_j $(j=1,2,3,4)$ とおく. Q_j でのファイバーの定義方程式は $\Psi(Q_j)=(Z_0^2+Z_1^2)^3$ となる. また, 2 階偏導関数

$$\begin{aligned}
\partial_{Z_0}\partial_x\Psi &= 8xZ_0^3(Z_0^2+Z_1^2)+4Z_0(xZ_0^4-\lambda^2x^{-3}Z_1^4),\\
\partial_{Z_1}\partial_x\Psi &= -8\lambda^2x^{-3}Z_1^3(Z_0^2+Z_1^2)+4Z_1(xZ_0^4-\lambda^2x^{-3}Z_1^4),\\
\partial_x\partial_x\Psi &= (Z_0^2+Z_1^2)(2Z_0^4+6\lambda^2x^{-4}Z_1^4),
\end{aligned}$$

は $(Q_j, (\sqrt{-1}:1)), (Q_j, (-\sqrt{-1}:1))$ において 0 をとるので, 3 重点となる. 3 階偏導関数の $(Q_j, (\sqrt{-1}:1)), (Q_j, (-\sqrt{-1}:1))$ での値を調べると 2 点とも通常 3 重点であることが確かめられる. この他の特異ファイバーとして $x^2=-(\lambda+1), -\lambda^2/(\lambda+1)$ を満たす $\widetilde{E}$ 上の 8 点で node を 1 つ持つファイバーが存在する. また, ∞, τ においても node を 1 つ持つ

ファイバーが存在するが，この node は A_1-特異点でもある．これら以外に特異ファイバーが存在しないことは，$\partial_{Z_0}\Psi$ と $\partial_{Z_1}\Psi$ の Z_0 に関する Resultant を計算することにより確かめることができる．従って，$\widetilde{B}_0+\sum_{j=1,2,3,4}\widetilde{F}_{Q_j}$ を分岐因子とする 2 次被覆の極小モデルの G による商多様体は $p_g=q=1, K_S^2=4, g=2$ なる極小一般型曲面で，アルバネーゼ写像の特異ファイバーは 7 本持つ．

(2') を満たす $\widetilde{B}_0$ の定義方程式．$\widetilde{B}_0$ は $6\widetilde{H}+\widetilde{F}_\infty+\widetilde{F}_\tau$ に線形同値で，$x^2=-\lambda$ を満たす $\widetilde{E}$ 上の 4 点と ∞,τ のファイバー上で通常 3 重点を 2 点づつ持つとしておく．このような条件を満たす式の 1 つとして，

$$\Psi=\sqrt{-\lambda}xZ_0^6+(x^2-2\lambda)Z_0^5Z_1-(x^2-3\lambda+\lambda^2x^{-2})Z_0^3Z_1^3+(\lambda^2x^{-2}-2\lambda)Z_0Z_1^5+\sqrt{-\lambda}\lambda x^{-1}Z_1^6$$

がとれる．$x^2=-\lambda$ を満たす $\widetilde{E}$ 上の 4 点 Q_j と ∞,τ のファイバー以外の特異ファイバーは，$x^2=4\lambda, \lambda/4$ を満たす $\widetilde{E}$ 上の 8 点で node を 1 つ持つファイバーが存在する．これら以外に特異ファイバーが存在しないことは，$\partial_{Z_0}\Psi$ と $\partial_{Z_1}\Psi$ の Z_0 に関する Resultant を計算することにより確かめることができる．従って，$\widetilde{B}_0+\widetilde{F}_\infty+\widetilde{F}_\tau+\sum_{j=1,2,3,4}\widetilde{F}_{Q_j}$ を分岐因子とする 2 次被覆の極小モデルの G による商多様体は $p_g=q=1, K_S^2=5, g=2$ なる極小一般型曲面で，アルバネーゼ写像の特異ファイバーは 7 本持つ．

参考文献

[1] M. F. Atiyah : Vector bundles over an elliptic curve, London Math. Soc. (3) 7 (1957), 414–452.

[2] E. Bombieri : Canonical models of surfaces of general type, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 42 (1973), 171-219.

[3] F. Catanese : On a class of surfaces of general type, Algebraic Surfaces, CIME, 1977, Liguori (1981), 269–284.

[4] F. Catanese and C. Ciliberto : Surfaces with $p_g=q=1$, Problems in the Theory of Surfaces and Their classification, Contra, Italy, Oct. 1988, Symposia Math., Academic Press, Vol. 32, 1991, 49–79.

[5] F. Catanese and C. Ciliberto : Symmetric products of elliptic curve, J. Algebraic Geometry 2 (1993), 389–411.

[6] E. Horikawa : On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, Complex analysis and algebraic geometry, a collection of papers dedicated to K. Kodaira (ed. W. L. Baily, Jr. and T. Shioda), 79–90, Iwanami Shoten and Cambridge Univ. Press, Tokyo, Cambridge-New York, 1977.

[7] E. Horikawa : Algebraic surfaces of general type with small $c_1{}^2$, I, II, III, IV, V. Ann. Math. 104 (1976), 358–387 ; Invent. Math. 37 (1976), 121–155 ; ibid. 47 (1978), 209–248 ; ibid 50 (1979), 103–128 ; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28 (1981), 745–755.

[8] T. Oda : Vector bundles on an elliptic curve, Nagoya Math. J. 43 (1971), 41–72.

[9] T. Takahashi : Certain algebraic surfaces of general type with irregularity one and their canonical mappings, Tohoku Math. J. 50 (1998), 261–290.

[10] G. Xiao : Surfaces fibrées en courbes de genre deux, Lecture Notes in Math. 1137, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.

Regular surfaces with genus two fibrations after Horikawa — Obstructed surfaces with ample canonical bundle —

大阪大学大学院理学研究科　今野 一宏 (Kazuhiro Konno)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

0 Introduction

The purpose of the present note is to show that some surfaces of general type with a genus two fibration are obstructed, that is, the Kuranishi space of deformations is singular. More precisely, it has two irreducible components meeting normally one of which parametrizes surfaces with genus two fibrations while the other does not. Surfaces with such a property already appeared in his famous series of papers "Small c_1^2" by Horikawa and, indeed one of the highlights was to see that they form a bridge connecting realms of surfaces with weak canonical map and those with birational canonical map, that is, the other component corresponds to canonical surfaces (see [1], [3] and [4]). The calculations presented here are only a mimic of his, [1] among others, done as an exercise when I learned Horikawa's works at the begining of my research on surfaces of general type. This explains a reason why it has not been submitted to a journal for a long time, though I already completed around 1989. As time goes by, I become to think that it may have a certain meaning to gather my sporadicting notes and put them in the preprint format.

I want to emphasize here again the importance of the still misterious line $K^2 = 4p_g - 12$ appearing in Miles Reid's Quadric Hull Conjecture [6] to which I refereed several times in my papers, because our obstructed surfaces live in the region bounded from below by Reid's line and the "unknown" component of the Kuranishi space seems a new world of canonical surfaces.

Main Theorem. *Let S be a minimal regular surface of general type whose numerical characters satisfy $K_S^2 < \min\{4p_g + 10, 5p_g + 2\}$ and K_S is ample. Assume that S has a genus two fibration with generic branch locus and that the canonical image of S is a cone over a rational curve. Let $p : \mathscr{S} \to M$ be the Kuranishi family of deformations of S. Then*

(1) *$M = M_1 \cup M_2$, where the M_i's are complex manifolds with $\dim M_1 = 11p_g + 6 - 2K_S^2$, $\dim M_2 = 10p_g + 10 - 2K_S^2$.*

(2) *$N = M_1 \cap M_2$ is a complex manifold of dimension $10p_g + 9 - 2K_S^2$.*

(3) *For $t \in M_1$, S_t has a genus two fibration. For $t \in M_2 \setminus N$, S_t does not have a genus two fibration.*